EL ESTUDIO DE LA DERIVADA MEDIADO POR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS Y LAS TIC

Dr. C. Luis Alberto Abreu Toribio

Email: labreu12@gmail.com

Universidad Politécnica del Golfo de México

Profesor Investigador de Tiempo Completo

Dr. José Ramón Peralta Jiménez

Email: jramon_peralta@hotmail.com

Universidad Politécnica del Golfo de México

Profesor Investigador de Tiempo Completo

Mtra. Flor de la Cruz González

Email: delacruz_flor@hotmail.com

Universidad Politécnica del Golfo de México

Profesora Investigadora de Tiempo Completo

Simposio al que tributa: La ciencia, la tecnología y la innovación a favor de la educación.

Resumen

El trabajo trata el estudio de la derivada partiendo de la introducción de problemas contextualizados y la integración de las TIC. El objetivo es presentar una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas contextualizados y la integración de los asistentes matemáticos para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial. La novedad que presenta está propuesta didáctica se basa en el trabajo con los problemas contextualizados y la integración de las TIC al proceso de enseñanza aprendizaje, aplicada creadoramente en el estudio de la derivada para la formación de los ingenieros. La significación práctica se manifiesta en la propuesta didáctica, ya que mediante su aplicación se desarrolló el proceso de enseñanza aprendizaje de una forma que permitió que los estudiantes se apropiarán de los contenidos aprovechando la resolución de problemas contextualizados, y la integración de asistentes matemáticos lo que promovió un proceso participativo, reflexivo y contextualizado mejorando los resultados de los estudiantes.

Palabras claves: derivada, resolución de problemas, problemas contextualizados, TIC

Introducción

La formación de los ingenieros es de gran importancia en el desarrollo social y económico de cada país. Es necesario que la sociedad, en general, y los docentes de las universidades, en particular, tomen conciencia de la necesidad de que las escuelas y facultades de ingeniería contribuyan al bienestar y a la satisfacción de todos. La enseñanza de las ingenierías en México “padece de deficiencias derivadas del propio subdesarrollo, donde existe un incipiente desarrollo tecnológico e incomprensión hacia la investigación científica” (Rivera, 1990, p. 3).

Las matemáticas y las ingenierías siempre han tenido una relación muy estrecha; desde los orígenes de ambas se han retroalimentado. Pueden mencionarse muchos problemas de ingeniería, cuya búsqueda de solución llevó a la creación de un nuevo conocimiento matemático; también hay consenso en el criterio de que no es posible concebir un ingeniero que no tenga una buena formación matemática. Un asunto que debe ser estudiado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en las carreras de ingeniería, es la forma en que deben enseñarse los contenidos matemáticos para que esta área sea un soporte teórico para las diferentes asignaturas de la especialidad y una herramienta para el desarrollo profesional del ingeniero.

Se considera en el contexto de las investigaciones que la matemática tiene como función, en la formación del ingeniero, la de proporcionar los conocimientos, habilidades, hábitos, capacidades y valores necesarios para la interpretación cuantitativa y geométrico-espacial de los problemas que se le plantean al profesional, ya sean de carácter teórico o práctico, que le permitan buscar sus soluciones para resolver problemas profesionales de su contexto de actuación.

De ahí, que esta asignatura sin perder el rigor conceptual que caracteriza a las ciencias matemáticas, tenga, en la formación de los ingenieros, un carácter instrumental contextualizado a la solución de los problemas de la profesión que debe enfrentar el ingeniero en su actividad laboral. El **objetivo** es proponer una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas contextualizados y la integración de los asistentes matemáticos para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada.

Se plantea que la propuesta es didáctica, ya que se trata de transformar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial en las carreras de Ingeniería, desde su estado actual hasta un estado deseado, determinado por las exigencias que la sociedad le impone a la universidad, donde la resolución sistemática de los problemas contextualizados y la integración de las TIC pueden significar un notable aporte a la formación del profesional.

Perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial en los marcos de esta investigación significa que con la integración de problemas contextualizados y las TIC en el tratamiento de los contenidos de la asignatura se promueva un proceso participativo, reflexivo y contextualizado que provoque efectos positivos en los resultados académicos de los estudiantes.

Desarrollo

El carácter didáctico de la propuesta está dado porque las acciones que se proponen van dirigidas a perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial de acuerdo con las categorías de la didáctica en su interrelación y considera el papel que deben desempeñar los profesores y estudiantes en este proceso, como componentes personales o personológicos de este. Luego, la propuesta incluye acciones destinadas a los profesores y a los estudiantes, considerando a ambos en la evaluación de las transformaciones que estas pueden producir. Se proponen consideraciones didácticas para el proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada a partir del planteamiento y resolución de problemas contextualizados, donde se hace uso de la modelación matemática y la integración de las TIC para el logro de una clase activa, reflexiva y contextualizada a la profesión en la que se van a desempeñar los estudiantes.

La propuesta didáctica de los autores para la resolución de problemas contextualizados y la integración de las TIC se puede sintetizar como sigue:

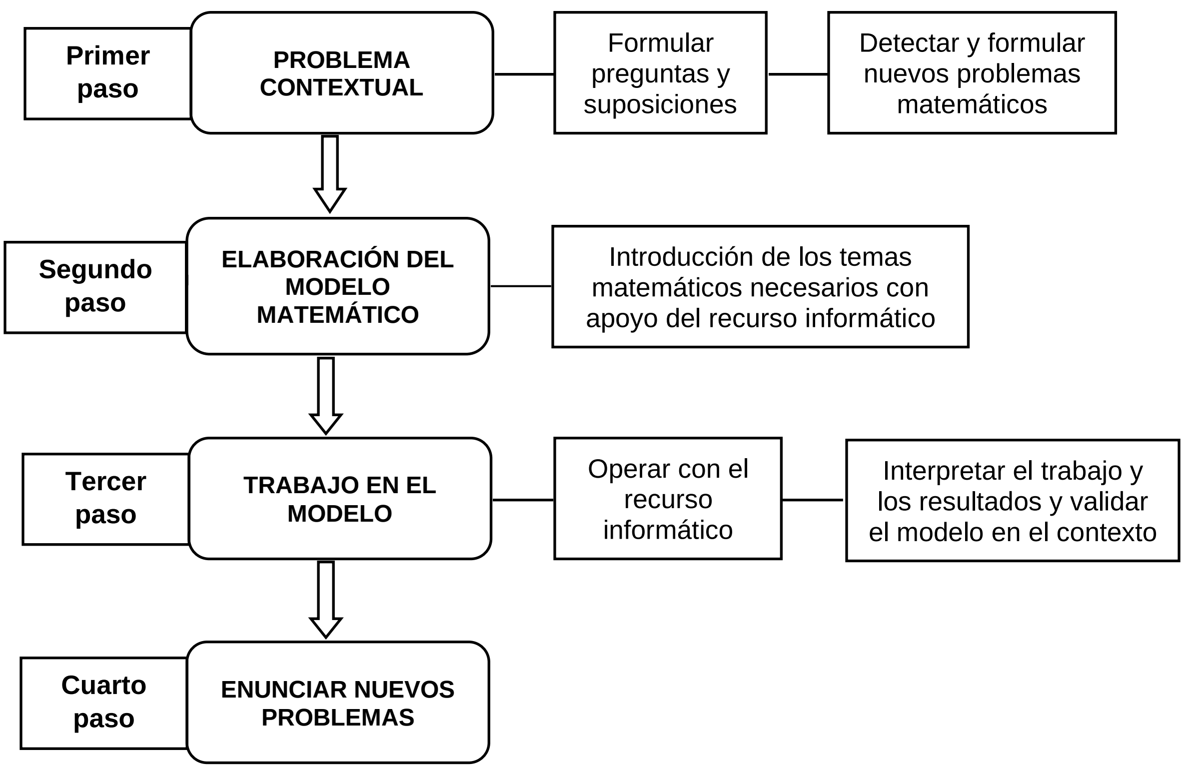
1. Determinación de los objetivos y contenidos, tanto de la matemática, como de las demás asignaturas de la carrera con el fin de seleccionar o buscar los problemas contextualizados que se propondrán.
2. Análisis de los problemas aprovechando los recursos informáticos con fines heurísticos.
3. Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para modelar matemáticamente.
4. Determinar el modelo matemático.
5. Dar la solución matemática mediante la aplicación del modelo aplicando los recursos informáticos.
6. Análisis de la solución y del procedimiento a la luz de la interpretación matemática del planteamiento inicial del problema.
7. Comprobar o validar la solución en términos del contexto.

8. Plantear nuevos problemas, analizar la posibilidad de transferencia de los métodos y procedimientos, valorar la utilidad de las tecnologías, ejecución propia y de los demás compañeros, reflexionar sobre la satisfacción en la actividad.

La propuesta que se propone, se diferencia de lo tradicional, pues presenta ventajas con respecto a este (en lo que se refiere a la elaboración de conceptos, relaciones o procedimientos); son importantes los aspectos siguientes:

– Los conocimientos adquieren sentido para los estudiantes porque los aprenden a partir de problemas reales, de la cotidianidad, de otras ciencias o de su futuro contexto laborar.
– Se potencia que los objetivos se alcancen a un nivel superior como resultado de la integración de las TIC, por ejemplo, en vez de una definición verbal (que supone una actitud pasiva por parte de los estudiantes), se procura su obtención con la participación de estos aprovechando las tecnologías, lo que facilita el paso a la abstracción.

La propuesta de los autores debe realizarse según el siguiente esquema (Abreu, 2015, p. 77)



Ejemplo de la aplicación para el estudio de la derivada

Primer paso: Se plantea la siguiente situación contextual

Razón de cambio del valor del dólar (variable discreta).

La siguiente tabla muestra el valor del dólar el día 2 de enero de cada año, durante el período comprendido entre 2016 y 2020. (Fuente: http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-mercado-cambiario/index.html)

t (años)	2015	2016	2017	2018	2019
V (pesos por dólar)	14.8290	17.3529	20.7323	19.4899	19.5878

Calcular qué tan rápido cambió el valor del dólar en un instante en particular.

Los estudiantes deben llegar a conocer la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, (se denotará por V_{ene17}) para ello deben obtener la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

Se formular preguntas y conjeturas tales como:

- ¿Cuál es la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes del 2 de enero de 2017?, y ¿un año después?
- ¿Cómo calcular la razón promedio de cambio en el intervalo de 2016 a 2017?
- ¿Qué significa ese resultado?
- ¿Cómo calcular la razón promedio de cambio en el intervalo de 2017 a 2018?
- ¿Qué significa el resultado obtenido?
- ¿Cuál es el promedio de los dos valores obtenidos?
- ¿Será este valor obtenido una buena estimación para la razón de cambio del valor del dólar el día 1 de julio de 2012? ¿Por qué?

Segundo Paso: Se elabora el modelo matemático.

Los estudiantes trabajan de manera independiente para calcular la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, se denota por V'_{ene17}.

Deben obtener la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

En el intervalo de 2016 a 2017, se denota la razón promedio de cambio del valor del dólar como $V_{(2016,\ 2017)}$ y se calcula dividiendo el cambio en V entre el cambio en t, es decir

$$V_{(2016\,,\,2017)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\underset{\text{en }2017}{\text{valor del dólar}} - \underset{\text{en }2016}{\text{valor del dólar}}}{2017\ -\ 2016} = \frac{20.7323 - 17.3529}{2017 - 2016} = 3.3794 \text{ pesos por año}$$

Esto significa que un año antes de 2017, el valor del dólar aumentó aproximadamente a razón de 3.3794 pesos por año.

De manera similar, la razón promedio de cambio del valor del dólar en el intervalo de 2017 a 2018 es

$$V_{(2017,\,2018)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\underset{\text{en } 2018}{\text{valor del dólar}} - \underset{\text{en } 2017}{\text{valor del dólar}}}{2018 - 2017} = \frac{19.4899 - 20.7323}{2018 - 2017} = -1.2424 \text{ pesos por año}$$

¿Cuál es el significado del signo?

Los estudiantes interpretan el resultado anterior y llegan a que después de 2017, el valor del dólar disminuye aproximadamente a razón de 1.24 pesos por año.

Es importante que los estudiantes comprendan que ninguno de estos dos valores corresponde a la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017; pero que dicha razón de cambio está entre estos dos valores; es decir:

$$-1.2424 \text{ pesos por año} < V'_{02/01/17} < 3.3794 \text{ pesos por año}$$

¿Cuál es el promedio de los valores obtenidos?

Los estudiantes calculan el promedio de los valores obtenidos

$$\frac{3.3794 + (-1.2424)}{2} = 1.0685$$

¿Qué significado tiene?

Se puede decir que es una estimación para la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, o sea $V'_{02/01/17} = 1.0685$ pesos por año

¿Será este valor una buena aproximación?

Los estudiantes deben comprender que este valor tampoco será una buena aproximación, ya que el intervalo que se utiliza es de un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

Tercer paso: Se trabaja en el modelo.

¿Qué se debe hacer para obtener una mejor estimación?

Para obtener una mejor estimación se deben fijar intervalos más pequeños, por ejemplo, la cotización del dólar por mes.

La siguiente tabla muestra el valor del dólar el día primero de cada mes, en el periodo comprendido de noviembre 2016 a marzo 2017. (Fuente: http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-mercado-cambiario/index.html).

t (meses)	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo
V (pesos por dólar)	19.1306	20.6149	20.7323	20.5757	19.9373

Los intervalos son ahora de un mes, 1 mes = 1/12 de año. Los estudiantes repiten la misma estrategia de calcular la razón promedio un mes antes y un mes después del 2 de enero de 2017.

¿Cuál es la razón promedio de cambio un mes antes del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un mes antes del 2 de enero de 2017 es:

$V_{(dic,\ ene)} =$ ______________________ ¿Cuál es el significado del signo? ______________

____

¿Cuál es la razón promedio de cambio un mes después del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un mes después del 2 de enero de 2017 es:

$V_{(ene,\ feb)} =$ ______________________ ¿Cuál es el significado del signo? _______________

____

Por lo tanto, se cumple que: ___________________ $< V'_{02/01/17} <$ _______________________

Una estimación para la razón de cambio el día 2 de enero es:

$V'_{02/01/17}$ ____________________ ¿Por qué el signo es negativo? _____________________

¿Se puede obtener una mejor estimación?

¿Será de utilidad una tabla con la cotización diaria del valor del dólar?

La siguiente tabla muestra el valor del dólar en el periodo comprendido del 29 de diciembre de 2016 al 043 de enero de 2017.

t (días)	29 diciembre	30 diciembre	02 enero	03 enero	04 enero
V (pesos por dólar)	20.6640	20.6194	20.7323	20.8520	21.3799

Ahora los intervalos son de un día; más pequeños aún que en la tabla anterior

(1 día = 1/ 30 de mes = 1/360 de año). Los años fiscales se consideran de 360 días.

Los estudiantes repiten la estrategia de calcular la razón promedio un día antes y un día después del 2 de enero de 2017.

¿Cuál es la razón promedio de cambio un día antes del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un día antes del 2 de enero de 2017 es:

$V_{(30\ dic,\ 2\ ene)} =$ _____________________

¿Cuál es la razón promedio de cambio un día después del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un día después del 2 de enero de 2017 es:

$V_{(2\ ene,\ 3\ ene)} =$ _______________________

Por lo tanto, se cumple que: ____________________ $< V'_{02/01/17} <$ ____________________

Una estimación para la razón de cambio el día 2 de enero es:

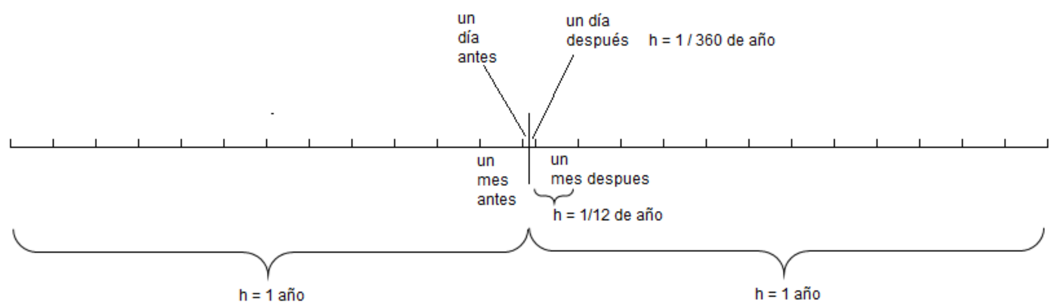
$V'_{02/01/17}$ ____

¿Será posible obtener una mejor estimación?, ¿Cómo se podría obtener?

Para obtener una mejor estimación sería necesario contar con una tabla de cotización del valor del dólar, por ejemplo, para cada hora o para cada minuto, pero dichas tablas no están al alcance, por lo que se considera que el valor diario es la mejor estimación que se puede hacer con la información que se dispone.

Para obtener las razones promedio se ha considerado como punto inicial el valor del dólar en el instante que interesa (12 de enero de 2017) y como punto final el valor del dólar en diferentes tiempos, antes y después de dicho instante.

Se denota con la letra "*h*" la longitud de los intervalos de tiempo; es decir, a la distancia que hay entre el punto inicial y el punto final; se debe aclarar que dicha distancia siempre debe medirse haciendo referencia a la misma unidad, por eso, los meses y días los se convierten a años.



¿Qué se observa cuando la h es de 1 día = 1/360 de año?

Las razones promedio antes y después del 2 de enero son muy parecidas, por lo que la diferencia entre ellas es muy pequeña, lo que significa que la estimación para la razón de cambio que se obtiene con la cotización diaria es muy buena.

En general, cuando una función se representa con una tabla de valores, no es posible encontrar la razón promedio de cambio en intervalos cada vez más pequeños, por lo que, en esos casos, sólo podemos obtener un valor aproximado para la razón instantánea de cambio.

Cuarto paso: Se enuncian nuevos problemas.

Se enuncian nuevos problemas, estos pueden ser:

1. La siguiente tabla muestra el Índice Nacional de Confianza del Consumidor (INCC). Dicho índice mide el nivel de optimismo o pesimismo de los consumidores mexicanos respecto a la evolución futura de la economía y a sus propias finanzas personales. (Fuente: https://www.inegi.org.mx/default.html

   Arriba de 50 puntos se considera que hay optimismo, debajo de 50 puntos se considera pesimismo.

t (meses)	Mar 18	May 18	Jul 18	Oct 18	Dic 18	Mar 19
V (pesos por dólar)	34.34	38.70	54.35	50.94	56.79	55.92

Estima la razón de cambio del INCC en octubre de 2018.

Otro problema que se puede orientar a los estudiantes es el siguiente:

2. **Razón de cambio de la población de México** (variable continua).

   De acuerdo con los datos del INEGI, en 2015 la población de México era de 119.9 millones de habitantes y crecía a una tasa de 1.3 % anual (Fuente: https://www.inegi.org.mx/temas/estructura/default.html#Informacion_general)

   Si la tasa de crecimiento sigue la misma tendencia, la población de México estaría representada por $P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^x$ donde x se mide en años a partir del 2015. Supongamos que nos interesa conocer la rapidez a la que crece la población en el año 2019 (es decir, cuando x = 4).

Se propone a los estudiantes resolver el problema

Para obtener una buena estimación de la razón de cambio en el instante x = 4, hay que obtener la razón promedio de cambio antes y después de x = 4, y que entre más pequeña sea la longitud "h" del intervalo, mejor será la estimación.

En este problema se conoce la fórmula para obtener la población en cualquier instante, por lo que se puede escoger como longitud del intervalo una distancia h = 0.01 antes y después de x = 4. Se puede usar el Microsoft Excel para obtener los valores.

$$P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^x \qquad h = 0.01$$

	x – h	**x**	**x + h**
x	3.99	4	4.01
P(x)	126.241129	126.257436	126.273744

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [3.99, 4] es:

$$P_{(3.99,\ 4)} = \frac{126.257436 - 126.241129}{4 - 3.99} = \frac{0.016307}{0.001} = 1.6307 \text{ millones de habitantes por año}$$

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [4, 4.01] es:

$$P_{(4,\,4.01)} = \frac{126.273744 - 126.257436}{4.01 - 4} = \frac{0.016308}{0.001} = 1.6308 \text{ millones de habitantes por año}$$

Del análisis se puede afirmar que la razón de cambio de la población de México en 2019, denotada por $P'_{x=4}$, está entre los dos valores anteriores; es decir:

$$1.6307 < P'_{x=4} < 1.6308$$

Las razones promedio antes y después de x = 4 son muy parecidas. Si las restamos $(1.6308 - 1.6307 = 0.0001)$ vemos que difieren en cuatro diezmilésimos; por lo que podríamos decir que una buena estimación para la razón de cambio de la población de México en 2019 es el promedio de ambas, es decir, 1.63075 millones de habitantes por año. Sin embargo, en este caso es posible acercarse más al instante x = 4.

Los estudiantes deben repetir el proceso, pero ahora considerando a h = 0.001 como la longitud del intervalo. Análogamente se puede utilizar el Microsoft Excel para evaluar en cada uno de los puntos y obtener la tabla:

Ahora evaluamos la función de población en 3.999 y en 4.001,

y obtenemos la siguiente tabla:

$$P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^{x} \qquad h = 0.001$$

	x – h	**x**	**x + h**
x	3.999	4	4.001
P(x)	126.255805	126.257436	126.259066

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [3.999, 4] es:

$P_{(3.999,\,4)} =$ ______________________________________ millones de habitantes por año.

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [4, 4.001] es:

$P_{(4,\,4.001)} =$ ______________________________________ millones de habitantes por año

¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores? ___________________________________

¿Qué podemos concluir acerca de la razón de cambio de la población de México en el año 2019? ____

Cuando la diferencia entre las razones promedio antes y después del instante que analizamos, es casi cero, o cero, como en este caso, significa que hemos obtenido una buena estimación para la razón instantánea de cambio.

Si la diferencia entre las razones promedio es muy grande, debemos tomar intervalos más y más pequeños, hasta que la diferencia sea casi cero, o cero.

Los acercamientos que se han hecho alrededor del instante x = 4 para obtener una mejor estimación de la razón instantánea de cambio, se les llama límites.

Entonces se puede concluir que:

La razón instantánea de cambio es el valor límite de la razón promedio de cambio, cuando la longitud del intervalo h es muy pequeña (casi cero), es decir,

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en el instante } x = a\end{matrix} = \lim_{h\to 0} (\text{Razón de cambio})$$

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en el instante } x = a\end{matrix} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

No obstante, como se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}}$

que puede escribirse como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Al sustituir esta última fórmula para la razón promedio de cambio de una función f(x) en la expresión que acompaña al límite, obtenemos:

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en el instante } x = a\end{matrix} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

¿Qué nombre recibe la razón instantánea de cambio?

Se puede concluir que en matemáticas a la razón instantánea de cambio se le llama **derivada**.

Entonces, se es posible establecer la siguiente definición de la derivada de una función:

La derivada de una función *f* (*x*) denotada como $f^{'}(x)$, está dada por:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si este límite existe.

Notación: La expresión $f^{'}$ se lee como “f prima”

Conclusiones

El proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de Ingeniería presenta dificultades relacionadas con la forma en que se estructura y ejecuta lo que no facilita la integración de los problemas contextualizados y las TIC de manera que se favorezca la formación del profesional, aunque se cuentan con los recursos materiales para ello.

La propuesta didáctica para la introducción de los problemas contextualizados propone considerar la enseñanza basada en problemas como un proceso que está conformado por los eslabones diseño, ejecución y evaluación.

La integración de las TIC en el proceso se concibe desde una concepción didáctica que promueve la utilización del espacio virtual de la universidad, el Excel y los asistentes matemáticos para la resolución de los problemas contextualizados.

Referencias

Abreu, L. A. (2015). El proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas contextualizados y la integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la carrera de ingeniería financiera. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. La Habana, Cuba.

Bayón L., Grau, J. M., Otero, J. A., Ruiz, M. M. y Suárez, P. M. (julio, 2011). Uso de herramientas de Software Libre para la enseñanza de las Matemáticas en los nuevos Grados. Trabajo presentado en el XIX Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, Barcelona, España. Recuperado de: http://www.unioviedo.es/bayon/osh/XIXCUIEET.pdf

Camarena, P. (2008). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. En Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Conferencia Magistral, Perú.

Camarena, P. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria,* 11(número especial), 397-424.

Coll, C. (2007). Tecnología y prácticas pedagógicas: las TIC como instrumento de mediación de la actividad conjunta de profesores y estudiantes. Anuario de Psicología, 38(3), 377-400.

Ferro, C., Martínez, A., Otero, M. (julio, 2009). Ventajas del uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. Tecnología Educativa. 29(7). Recuperado de: http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec29/

Ponce, J. C. y Rivera, A. (julio, 2011). Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77(7), 85-98.

n http://publicaciones.anuies.mx/revista/76