

Construcción del concepto de área, desde la teoría APOE y el uso del software GeoGebra¹

Gisselle Paola Bayona-Prieto. Magister en Informática para la Educación. Universidad Industrial de Santander, Colombia. gissellebayonamotoso@gmail.com

Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias-Especialidad de Matemática Educativa. Universidad Industrial de Santander, Colombia. doraroaf@uis.edu.co

Jorge Winston Barbosa-Chacón. Magister en Informática. Universidad Industrial de Santander, Colombia. jowins@uis.edu.co

Forma de presentación: Ponencia. Simposio: “La ciencia, la tecnología y la innovación a favor de la educación”.

Resumen. El estudio tuvo como propósito describir la ruta de construcción del concepto de área en estudiantes de sexto grado en Colombia que, apoyado en el software GeoGebra, posibilite formalizar el cómo de las *acciones* concretas para lograr concebir dicha noción como un *objeto* abstracto. A partir de estos elementos se analizan las estructuras y los mecanismos que hacen parte de la *descomposición genética*, principal herramienta para poder detallar la construcción de la noción de área de figuras planas. La indagación estuvo orientada por la teoría APOE (*Acción, Proceso, Objeto y Esquema*), de la cual fue creada por Dubinsky *et al.*, (1996) como proceso investigativo para el análisis cognitivo de conocimientos matemáticos. Se concluye que, se hizo evidente la contribución de la propuesta frente al cambio de pensamiento en los estudiantes que implementaron GeoGebra, recurso que favoreció la participación activa de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, existiendo una interacción máquina-sujeto que motiva e interesa al individuo en el aprendizaje matemático.

Palabras clave: Área, Teoría APOE, GeoGebra.

I. Introducción.

El presente trabajo fue adelantado por el *Grupo de Estudio e Investigación en Tecnologías y Educación (GENTE)*², con la finalidad de describir las estructuras y los mecanismos mentales

¹ Nombre del proyecto: “*Construcción del concepto de área de estudiantes de básica secundaria: una experiencia a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos apoyada en el uso del software GeoGebra.*” Maestría en Informática para la Educación. Universidad Industrial de Santander: <http://simon.uis.edu.co/mie/>

² GENTE: Grupo de investigación de la Universidad Industrial de Santander. Ver: <http://scienti.colciencias.gov.co:8080/gruplac/jsp/visualiza/visualizagr.jsp?nro=0000000003057>

que desarrollan estudiantes de sexto grado en la construcción del concepto de área de figuras planas orientado por la teoría APOE, como elemento teórico y pedagógico; considerando que, desde esta perspectiva, es posible unir la práctica formativa al conocimiento y lograr impactar positivamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Ante la intencionalidad, una estrategia es incentivar la resolución de problemas de razonamiento espacial, desde apuestas formativas centradas en el concepto de área de figuras planas, en donde el uso del software GeoGebra sea un recurso de apoyo, es decir, formular retos que, al igual que lo menciona Acosta (2007), tengan como finalidad la implementación de una herramienta didáctica que se sume al propósito de hacer más adecuado, atractivo y exitoso el proceso de aprendizaje; intencionalidad igualmente manifestada en los trabajos Sunkel, Trucco y Espejo (2013), en donde se traza como horizonte el hecho de que los recursos tecnológicos deben apoyar el fenómeno de: i) El pensamiento creativo; ii) El pensamiento crítico, autocrítico y reflexivo; iii) El pensamiento relacional y vinculante; iv) La resolución de problemas y v) La comunicación y colaboración.

En el currículo escolar de un gran número de países está organizado el desarrollo de los conceptos relacionados con áreas de figuras geométricas (NTCM, 2000), resaltando la necesidad de combinar la geometría con los números. En esta perspectiva, y desde la didáctica de la matemática, y basándose en la teoría APOE creada por Dubinsky *et al.*, (1996), es pertinente nombrar la investigación realizada por Londoño y Palacio (2018), en la cual abordan la problemática que se presenta en las universidades relacionada con el concepto de integral y lo hacen con una estrategia que busca transformar la manera de pensar que conciben los estudiantes de octavo y décimo grado sobre la noción de área de figuras planas; las autoras proponen una interacción entre los pensamientos espacial, variacional y numérico, a partir de la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales, denominada descomposición genética, que sustentan en la construcción de un “objeto matemático” (concepto matemático). Por precedentes como este, es que resulta conveniente las intervenciones que se hagan en estudiantes de sexto grado ante la construcción del concepto de área.

Este compromiso conllevó a formular la siguiente pregunta: *¿Cómo son las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado, a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos para construir el concepto de área, apoyadas en el uso didáctico del software GeoGebra?* Pregunta que instó a formular el siguiente **objetivo de investigación**: Describir las estructuras (*acciones, procesos y objetos*) y mecanismos

(interiorización, coordinación, encapsulación) mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado a partir de la aplicación de *acciones* sobre *objetos* concretos para construir el concepto de área de figuras planas.

II. Marco Teórico

El estudio tomó como referencia la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) originada por Ed Dubinsky en 1985 y desarrollada en conjunto con la Research in Undergraduate Mathematics Education Community -RUMEC-; la cual es una teoría de la didáctica de las matemáticas, fundamentada en la epistemología genética de Piaget, que explica la construcción de conocimiento matemático; centrado en la posibilidad de ayudar al estudiante en su proceso de aprendizaje a través de una participación pedagógica adecuada, procesual y eficaz. La construcción de un concepto está vinculada con las estructuras mentales previas del estudiante y la noción que pueda crear del objeto a lo largo de su experiencia con el mismo; y es aquí donde es relevante el nivel de razonamiento que logre hacer un estudiante sobre cierta situación y de allí la importancia del tipo de preguntas que se le planteen, que promuevan un conocimiento nuevo y, a su vez, se sume al conjunto de construcciones previas (Roa-Fuentes, Oktaç, 2010).

En este sentido, el principal instrumento que posibilita describir la forma cómo se construye el conocimiento se denomina *descomposición genética*; adicionalmente, se espera que determine aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas (Arnon *et al*, 2014). En correspondencia, a continuación, se presenta una descripción general de las estructuras y mecanismos, y se toma como ejemplo el concepto área.

Las *acciones* son las primeras estructuras que un individuo puede construir para comprender un concepto matemático. Estas inician con su experiencia con el medio en que se desarrollan y con la posibilidad de resolver diferentes problemas matemáticos. Las estructuras han sido definidas en algunos trabajos como las primeras nociones o ideas matemáticas sobre cierto concepto matemático. Como proponen Arnon *et al.*, (2014), las *acciones* se realizan paso a paso y están condicionadas por estímulos externos que el individuo debe seguir para realizar una transformación específica. Según estos autores “las acciones son fundamentales para la Teoría APOE, porque permite el desarrollo de otras estructuras. En particular, los procesos son interiorizaciones de *acciones* y *objetos* mentales que surgen debido a la

aplicación de las acciones. Nuevas *acciones* conducen al desarrollo de estructuras de orden superior” (Arnon *et al.*, 2014, p. 20).

Para el concepto de área en estudiantes de primaria, frente a una situación que requiere calcular el área de una figura plana, un estudiante puede definir un patrón de medida y establecer relaciones específicas de recubrimiento y conteo. En este caso, los estudiantes no están necesariamente condicionados por la mecanización de una fórmula.

La interiorización de *acciones* es el resultado de la reflexión que genera el individuo cuando resuelve variados problemas asociados con el concepto de interés. De esta manera, las *acciones* que realizaba de manera externa, ahora las realiza en su mente. Como resultado del mecanismo de interiorización se da paso a una estructura *proceso*.

Para el caso del cálculo de área de figuras planas, por ejemplo, el estudiante no está condicionado por un patrón de medida, ni por el cálculo exacto del área. En la estructura *proceso* de área juega un rol fundamental la noción de aproximación; como resultado de su experiencia, el estudiante puede componer diferentes imágenes a partir de figuras con áreas conocidas, para encontrar valores aproximados y/o exacto del área de nuevas representaciones geométricas. Incluso puede comparar el área de figuras diferentes en composición, pero un valor de superficie igual, mayor o menor, sin necesidad de calcular el valor exacto de cada región.

En la construcción de diferentes conceptos matemáticos, se ha señalado la importancia de la construcción de *acciones* y *procesos* en los primeros niveles escolares. Esto dado que, en el nivel universitario, por ejemplo, los estudiantes generalmente no evidencian la construcción de *objetos* asociados a conceptos matemáticos avanzados. Por tanto, es fundamental asegurar la construcción de conceptos y nociones básicas más allá de la mecanización y repetición de algoritmos, dado que el conocimiento matemático siempre debe posibilitar la evolución y construcción de nuevas estructuras.

Una vez un individuo logra una estructura *proceso*, es posible que la encapsule en un *objeto*. La diferencia entre estas dos estructuras radica en que la primera es dinámica y la segunda es estática. De tal manera que una estructura *objeto* permite que el individuo considere la posibilidad de realizar nuevas transformaciones sobre él, o que pueda generar nuevos objetos a partir de operar objetos preexistentes (Arnon *et al.*, 2014).

En el caso del área, en educación básica secundaria, podría esperarse que los estudiantes puedan componer y descomponer figuras planas sin alterar su área. Además, dado el valor del

área de una figura plana, pueden construir diferentes figuras que corresponden con el valor numérico asignado. Esto permite pensar en una manera estática del área, que fomenta la construcción futura de un *esquema*.

Dada la evolución del tipo de problemas y la experiencia del estudiante con nuevos conceptos, este *esquema* puede albergar nociones asociadas a la representación geométrica de expresiones algebraicas del tipo $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$; así como la noción de área bajo la curva que fundamenta el concepto de integral.

En general, los *esquemas* son una colección coherente de *acciones, procesos, objetos* y otros *esquemas* que están relacionados a través de los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación, tematización, entre otros. Todo esto asociado con un concepto o noción matemática particular. Para el caso del área y como se mencionó en el párrafo anterior, el *esquema* puede partir de acciones específicas de recubrimiento, conteo y aproximación para llegar a nociones más abstractas, relacionadas, por ejemplo, con el cálculo del área bajo una curva a partir de la construcción de sucesiones de sumas de Riemann, que desembocan en el concepto formal de la integral.

Como se ha mencionado en cientos de trabajos, la coherencia de un *esquema* está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular (Arnon *et al.*, 2014).

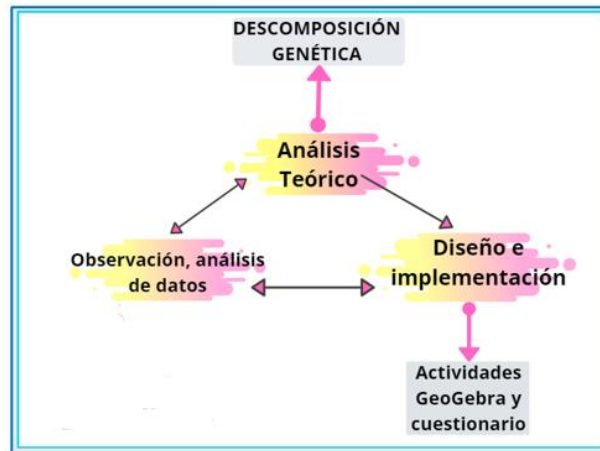
III. Metodología.

A continuación, se procede a explicar el ciclo de investigación con el cual se desarrolló la experiencia sobre área de figuras planas en el marco de la teoría APOE, el cual consta de tres componentes: i) Análisis teórico; ii) Diseño, implementación y observación; iii) Análisis y verificación de datos (Ver figura 1).

-Análisis teórico. Corresponde al diseño de la descomposición genética hipotética. El análisis teórico radica en: Describir las estructuras: acciones, procesos, objetos y esquemas; y mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación que un estudiante puede realizar para construir un determinado objeto matemático (Londoño y Palacio 2018, p. 40).

La asociación de estas estructuras y mecanismos forman la *descomposición genética hipotética*.

Figura 1. Ciclo de investigación basado en la teoría APOE



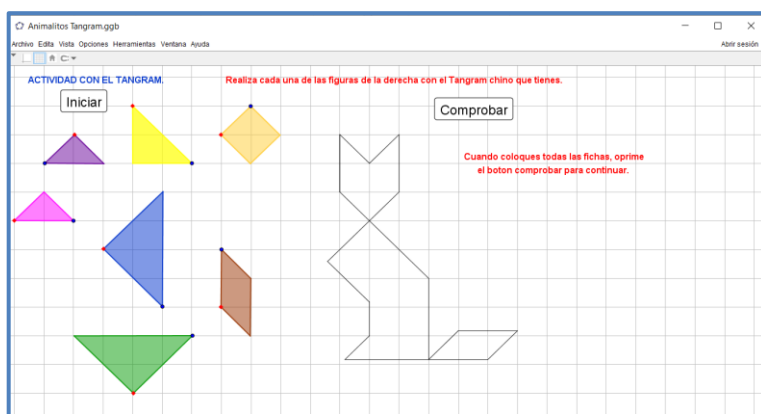
Fuente: Adaptado de Asiala *et al.*, (1996)

Una *descomposición genética* está definida por Asiala et al. (1996, p.7) como: “un conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del aprendiz”. Para Roa-Fuentes y Parraguez (2017), Zabala (2015), Gamboa (2013) y grupo RUMEC (DeVries, 2001) cuando se utiliza la teoría APOE en una investigación se comienza por elaborar una *descomposición genética* del concepto de interés.

-Diseño, implementación y observación. Incluye: i) Elaboración de actividades en GeoGebra y cuestionarios; ii) Realización de la experiencia y iii) Registro de experiencias educativas.

Una forma de mostrar el progreso en el aprendizaje concerniente a la noción de área de figuras planas es comenzar por el recubrimiento en material concreto como es papel, donde el recorte y pegado van a significar momentos determinados por el espacio y el tiempo para el estudiante; es decir, van a realizar las actividades con la limitante de que si se equivocan no van a poder corregir, motivo por el cual resultó llamativo tener la posibilidad de construir en geometría dinámica, GeoGebra, acciones que se pudieron hacer y volver a hacer sin miedo a equivocarse, no importa fallar porque el programa te motiva a intentarlo nuevamente y, no es el caso, por el contexto de los estudiantes de sexto, pero si quisieras te lo llevas para la casa y lo practicas, o lo descargas en el celular para implementarlo en el momento requerido (Figura 2).

Figura 2. Actividad de medición y comparación del área utilizando el Tangram en GeoGebra.



Fuente: Construcción propia.

-Análisis y verificación de datos: Representa la validación de la descomposición genética hipotética. Para el análisis de resultados se efectúa una relación entre las respuestas y la Descomposición Genética Hipotética identificando las estructuras y mecanismo que construyen los educandos.

Participantes. La experiencia educativa corresponde a estudiantes de sexto grado de básica secundaria de una institución rural del municipio de Girón en Colombia.

IV. Resultados.

Desde el punto de vista etimológico se considera la transformación de la noción de área de figuras planas por medio del estudio realizado con los estudiantes participantes. Se organizó en *acciones* de recubrimiento de superficies planas no poligonales, comparación de áreas a través de la composición y descomposición de superficies; asemejando lo que sucede con las culturas que se dedican al cultivo del café y su proceso de secado al ser esparcido en terrenos áridos destinados para tal fin.

El siguiente paso fue la formalización – *procesos* –, donde la herramienta GeoGebra jugó un papel importante, al hacer una correlación entre la visualización y la interiorización en el estudiante en la modelación de algoritmos numéricos; además, los estudiantes implementaron estrategias de procesamiento mental para la estimación de superficies, por ejemplo, obtuvieron el área de superficies planteadas en situaciones problemáticas que ya no podían ser dibujadas ni representadas y lograron solucionarlas.

La Reflexión, a partir de la implementación con el software GeoGebra, arrojó buenos resultados; el desarrollo de las actividades con geometría dinámica favoreció la comprensión, la innovación y motivación entre geometría y la resolución de problemas, por sus

representaciones y transformaciones haciendo que el estudiante adquiriera la noción de área como medida de la superficie plana.

Los hallazgos de este estudio confirman que en la *descomposición genética hipotética* se describió la construcción de la noción de área de superficies planas como eje fundamental del conocimiento, las *acciones* concretas de estimación de áreas de superficies planas no poligonales pusieron en disposición al estudiante de sexto grado de básica secundaria a descubrir su manera de razonar de forma distinta a como lo venía presentando en la básica primaria; estas acciones facilitaron la comprensión de la medida de la superficie de una figura plana para ser transferidas por medio del mecanismo de Interiorización a los *procesos* mentales que conllevan estimaciones de áreas, comparaciones de superficies y diferenciación de nociones de área y perímetro.

En este sentido, se observó un impacto en la asimilación de la *acción* de iniciación, en que el estudiante efectuó recubrimiento de superficies poligonales y no poligonales, realizando conteo y luego sumando, componiendo y descomponiendo regiones planas, haciendo uso de la relación de igualdad y/o inclusión de áreas y comparando medidas de superficie abordó la formalización de resolución de problemas geométricos con el mecanismo de coordinación entre *procesos*; es decir, interpretó las áreas de figuras planas como la medida del espacio que ocupa, separando la noción de área de la de perímetro, dando valor numérico a la medida de la superficie por medio de algoritmos mentales que efectúa con agilidad.

V. Conclusiones.

La experiencia evidenció contribuciones así:

-En los educandos. Respecto al desarrollo de construcciones en GeoGebra permitió mejorar la percepción visual que tienen de la superficie de una figura plana, tener la oportunidad de ampliar o encoger una superficie a través de la geometría dinámica que ofrece el software favorece la comprensión de los procedimientos de carácter numérico para obtener el área de una superficie plana.

-En el docente-investigador. Fue satisfactorio aportar en la construcción del conocimiento, observar que los estudiantes aprenden significativamente; dejando a un lado la trasmisión de fórmulas sin sentido. Antes bien, los estudiantes valoran el proceso llevado a cabo con expresiones de agrado y gusto por la geometría, fortaleciendo el interés por el conocimiento matemático.

El análisis de los datos reveló que los participantes están en la capacidad de construir *acciones, procesos y objetos* mentales de relación a las áreas de superficies planas; la ruta descrita en la *descomposición genética hipotética*, donde se asocian las estructuras y los mecanismos mentales en el estudiante, posibilitó visualizar la forma como se construye mentalmente la noción de área, reconocida como válida por medio de los registros en las actividades implementadas.

Respecto a las líneas de investigación que puedan derivarse, es necesario desarrollar en los grados de básica primaria la construcción del concepto área de manera gradual, donde el estudiante pueda tener contacto con material concreto en sus comienzos pero que, también, reciba de sus maestros la oportunidad de interactuar con la geometría dinámica. Aquí, se recomienda GeoGebra porque es un software libre, de fácil manejo, amigable y, también, en su plataforma de internet, ofrece materiales construidos por estudiosos del uso didáctico del software.

Bibliografía.

Acosta, J. (2007). *Retos y desafíos ante las puertas de la tecnología*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (pp. 611 – 616). Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ángel, M. P. Rojas, A. H. (2014). *El caso de los procesos infinitos presentes en la construcción de los números reales en algunos libros de texto de matemáticas de 8° vistos desde la teoría APOE*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Science.

Asiala, M. Brown, A. DeVries, D. Dubinsky, E. Mathews, D. Thomas, K. (1996). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. En J., Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society.

DeVries, D. (2001). *RUMEC / APOS Theory glossary*. Georjy Collage & State University. Milledgeville. Recuperado de <http://cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html>

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática* 8(3), pp. 25 – 41.

Gamboa, M. (2013). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada una mirada desde la teoría APOE*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.

García-Peñalvo, F. J. (2002). *Software educativo: evolución y tendencias*. Recuperado de <https://gredos.usal.es/handle/10366/69408>

Londoño, M. Palacio, Y. (2018). *Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria*. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Maturana, I. Paraguez, M. Nettle, A. (2015). APOE y la generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo. *XIV Conferencia interamericana de educación matemática*.

Roa-Fuentes, S. Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación Universitaria*, 10(4), pp. 15 – 32.

Roa-Fuentes, S. Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en educación matemática* 13 (1), pp. 89 – 112.

Sunkel, G. Trucco, D. Espejo, A. (2013). *La integración de las tecnologías digitales en las escuelas de América Latina y el Caribe. Una mirada multidimensional*. Chile: CEPAL.

Zabala, A. (2015). *Construcciones y Mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabrí para el cálculo de volúmenes*. (Tesis Doctorado). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.